DALL'IDEA DI MATEMATICA DEL DOCENTE ALLA DIDATTICA…

***Abstract**: In this paper we want to underline the relevant role of the teacher's idea of mathematics that influences his didactic behavior. Some stereotypes are critically analyzed to illustrate this point of view, with the goal to promote a discussion about what is an adequate conception of mathematics for teaching.*

Marco Costanzi
Alejandro Cuneo

DALL'IDEA DI MATEMATICA DEL DOCENTE ALLA DIDATTICA…

Marco Costanzi* Alejandro Cuneo**[1]

1. Introduzione

È noto che la matematica risulta per gli studenti italiani una delle discipline più problematiche tanto che praticamente tutti i ragazzi che affrontano un insuccesso scolastico attribuiscono alla materia una particolare responsabilità. Questo fatto è cosi diffuso che ci fa pensare ad un problema di base con l'insegnamento della matematica a scuola. Nelle scuole gli insegnanti di matematica attivano particolari pratiche didattiche, mirate a gestire queste particolari situazioni. Per ognuna di queste pratiche didattiche soggiace un'idea, una concezione generale sulla matematica che la determina e la giustifica. Per questa ragione risulta quindi necessaria un'attenta analisi critica di cosa significhi insegnare e, nel caso specifico, cosa si intenda per matematica.

1.1. Osservazione

Da questa premessa risulta interessante capire che idea c'è di matematica dietro lo sviluppo di un determinato modo di insegnare matematica e mettere in risalto il legame tra una concezione della matematica e una certa tipologia di pratica didattica. Il tutto è mirato a riflettere criticamente su quale potrebbe essere un'opportuna concezione della matematica, che possa portare ad

[1] *Iscritto al corso di Laurea Magistrale in Matematica all'Università di Verona, docente di matematica presso il CSF Stimmatini di Verona.
Costanzi.marco@gmail.com, www.marcocostanzi.it

**Dottorando di ricerca presso la Scuola Internazionale di Formazione della Persona, Università di Bergamo. Alejandro.cuneo@unibg.it

una didattica effettiva nel favorire un apprendimento significativo dei temi fondamentali della materia.

2. Pratiche didattiche: due stereotipi

L'esperienza scolastica, sia da studenti che da docenti, ci permette di identificare e dare le principali caratteristiche di certe modalità "tipiche" che si manifestano nell'insegnamento della matematica nelle scuole. Siamo consapevoli che è impossibile classificare o "mettere in una sola scatola" la pratica di insegnamento attivata da un singolo docente, che a volte si avvicina di più ad una modalità e altre volte ad un'altra tenendo conto dell'argomento che tratta, del gruppo, del contesto. Tuttavia siamo convinti che una caratterizzazione come quella che segue sia utile per fare alcune riflessioni. Per esempio, nelle scuole, risultano diffuse modalità di insegnamento della matematica di stile meccanico-mnemonico e di stile materiale-concreto.

2.1. Stile meccanico-mnemonico

Per stile meccanico-mnemonico intendiamo tutti quei processi nei quali si somministrano agli studenti formule e regole, di solito ripetute tante volte nello stesso modo, da imparare a memoria con l'aiuto di tecniche mnemoniche. La presentazione di queste regole evita di fare ricorso ai possibili significati intrinseci, e tende a restringere l'ambito di applicazione delle regole a contesti ben delimitati, tante volte indicati anche dalla presenza di precisi simboli sintattici. Ad esempio, se in un problema si trova la parola "ripartire" viene applicata subito la divisione tra i numeri che compaiono nel testo del problema, senza capire cosa si stia facendo. Un'altra caratteristica di questo approccio sono una grande quantità di esercizi, tutti molto simili tra di loro, quindi applicazioni di regole in precisi contesti. Possiamo osservare alcuni esempi nello sviluppo del calcolo letterale, nella presentazione dei prodotti notevoli: spesso vengono somministrate le formule come "verità" e ci si limita a ripetere costantemente l'applicazione fino a quando lo studente acquisisce la tecnica di sostituzione. In questo senso l'insegnante propone agli studenti una "pratica automatizzata" in cui le formule sono algoritmi di calcolo. Per calcolo intendiamo un fatto sintattico, sviluppato appositamente per non far ricorso a significati, in tal modo può essere utilizzato da qualsiasi operatore che non capisce i concetti, come una macchina. Un insieme di simboli iniziali (in un certo linguaggio) viene trasformato passo a passo attraverso la applicazione di regole e seguendo una strategia per arrivare a un certo insieme di simboli finali. Un semplice esempio di calcolo è l'algoritmo per la moltiplicazione di numeri naturali: questo calcolo viene effettuato sulle cifre in notazione araba (provate a farlo in un'altra notazione, per esempio quella romana!), e consiste in precise regole di transformazione di queste cifre che portano ad ottenere una rappresentazione finale. In nessun momento del proceso si usa il concetto di moltiplicazione di numeri naturali come somma ripetuta (moltiplicazione semantica). L'algoritmo sintattico della moltiplicazione è corretto e accettato perché lo si può dimostrare utilizzando le proprietà delle operazioni e della notazione araba. La dimostrazione assicura che la rappresentazione finale, ossia quelle cifre ottenute attraverso tutte queste regole sintatiche (eseguibili anche da un operatore che non ne comprende il senso), corrisponde esattamente al numero che si otterrebbe mediante la moltiplicazione semantica. Le macchine, per esempio i computer, lavorano solo con algoritmi sintattici in quanto non sono in grado di capire i significati. La macchina si limita ad eseguire trasformazioni sui simboli, siamo noi che interpretiamo quelle rappresentazioni, e abbiamo fiducia nel risultato perché conosciamo la correttezza degli algoritmi usati grazie alle dimostrazioni. A questo punto è chiaro che presentare agli studenti algoritmi di calcolo senza dimostrazione o senza nessun altro collegamento con il significato, equivale a trattarli come macchine automatiche, incapaci di ragionare. Quando l'esperienza di apprendimento della matematica di una persona è stata sempre di questo tipo non dovremmo sorprenderci di atteggiamenti negativi verso la disciplina: la matematica è divenuta, così facendo, strumento inconsapevole per risolvere problemi sintattici. In questa

pratica troviamo quindi risoluzioni senza comprensione: l'idea di una matematica che rimane esterna all'ambiente reale delle persone, che rimane calcolo automatizzato procedurale. L'insegnante si pone con l'autorevolezza del ruolo che esercita e lo studente impara divenendo macchina, ossia strumento di calcolo.
La presentazione della matematica come un lungo elenco di regole che non fanno ricorso ai significati fa pensare a una soggiacente idea di matematica come gioco formale. In questa concezione si nega direttamente qualsiasi collegamento con la realtà: tutta la matematica diviene un insieme di "punti di partenza" scelti arbitrariamente, sopra ai quali si costruisce seguendo altre ben precise regole, anche queste arbitrarie. Lo stesso può avvenire nel gioco degli scacchi, il quale richiede una precisa scacchiera e pezzi che per muoversi seguono regole precise. Ma anche la scacchiera potrebbe essere diversa, e i pezzi e le regole di movimento diverse, ottenendo così un nuovo gioco. Questa concezione della matematica risolve definitivamente certi problemi epistemologici, perché non ha più senso chiedersi se le ipotesi di partenza sono opportune o meno. Ma allo stesso tempo, con questa idea, risulta quasi impossibile spiegare l'enorme applicabilità della matematica al mondo reale.
Certamente diverse persone trovano piacere e sono interessate ai giochi formali: anche tra gli studenti di qualsiasi scuola si possono trovare ragazzi ai quali piace, e sono bravi in questo senso (e i professori di questo stile solitamente ritengono questi ragazzi particolarmente portati per la matematica). Tuttavia, tanti altri rimangono giustamente molto perplessi di questo tipo di approccio e si chiedono a cosa può servire tutta questa manipolazione di simboli e in che modo tutte queste formule potranno essere utili nella loro vita.

2.2. Stile materiale-concreto

Per stile materiale-concreto intendiamo tutti quei processi dove la matematica si ferma “al fare”, al risolvere problemi che rimangono nella pratica. Tanti insegnanti spinti dalla richiesta di lavorare in modo interdisciplinare e volendo approfittare della più alta motivazione che gli studenti dimostrano nelle materie di laboratorio, cercano di operare sulla risoluzione di problemi concreti a partire da materiali che si possono toccare, misurare, ecc. In questo modo si valorizza il tipo di verifica che si realizza attraverso il confronto con gli oggetti reali e non si considerano quei concetti e argomenti che si trovano a fatica in applicazioni concrete e materiali. Le situazioni concrete presentano tanti aspetti che sono irrilevanti per la soluzione del problema considerato: rimanendo nello specifico non ci si accorge da cosa dipendono effettivamente certi risultati, e non ci si accorge di poter applicare le stesse argomentazioni in situazioni in cui solo gli aspetti rilevanti sono gli stessi. Uno dei rischi diviene l’impossibilità di generalizzare strategie utilizzate in situazioni concrete; senza così elaborare concetti, senza trasportare in ambiente astratto il problema. Un esempio potrebbe essere lo studio delle proporzioni legato solamente alle esperienze in cucina, oppure lo studio della geometria solida legata solamente a pezzi meccanici. L’insegnante si pone come strumento per risolvere problemi concreti, reali, che si toccano. L’idea che l’insegnante propone è quella che la matematica diviene solo supporto del lavoro pratico, fermandosi a quello che si vede. Non si sviluppa, così, un atteggiamento di rimeditazione di quanto fatto, per ottenerne la consapevolezza, utile anche per affrontare problemi analoghi che ogni volta diverrebbero problemi totalmente nuovi e misteriosamente superati con gli stessi passaggi. Le “astrazioni” vengono svalutate e rischiano di non essere prese in considerazione. A questo punto è opportuno riflettere su cosa si intende con la parola astrazione. Un significato viene dato dalla contrapposizione con il concreto o materiale, cioè quello che può essere percepito attraverso i sensi. In questo senso, si potrebbe dire che la matematica è tutta astratta. Si pensi ai concetti più basilari come quello di numero, che non corrisponde esattamente a un'entità reale, ma è un concetto che esiste solo nella mente. Invece vorremo proporre un altro significato della parola "astrazione", non tanto come caratteristica di un'entità, ma come operazione mentale. Tale operazione consiste semplicemente nel prendere in considerazione certi aspetti della realtà, tralasciando tutti gli altri. Questa è un'operazione mentale che si fa spesso in matematica; per esempio tante volte nel considerare un gruppo di oggetti, non prendiamo in considerazione la loro forma, il peso, il colore, le dimensioni, ma solo la loro molteplicità.

L'idea di matematica che soggiace a questo modo di agire vede la matematica come una serie di strumenti per risolvere problemi concreti. La matematica come serva della tecnica, senza porsi il problema di capire come questi strumenti sono stati concepiti, costruiti e come siano in grado di risolvere gli stessi problemi concreti. Un grosso problema di questa concezione è che risulta poco flessibile, tanto un piccolo cambiamento nella situazione problematica a volte non ha nessun effetto, altre volte invece comporta che lo strumento matematico che si utilizzava diviene inutile. Questi strumenti, oltre a non conoscere come erano stati costruiti, non si sa come modificarli o adattarli a nuove situazioni. Inoltre, niente permette la creazione di nuovi strumenti per nuovi problemi. In questo approccio, la validità degli strumenti viene data dal successo nella gestione delle situazioni concrete tralasciando ogni altra verifica (dimostrazioni, coerenza...). Questo tipo di verifica, però, va contro una delle caratteristiche fondamentali della matematica: un numero finito di esempi non bastano come prova di validità.

Gli studenti sono lasciati fuori dalla matematica, diventano utilizzatori, vedono il tutto come una scatola nera. Per gli studenti la matematica rimane misteriosa, e non capiscono come mai quello che fanno funziona.

2.3. Allora... cos'è la matematica?

Da quanto osservato e motivato sopra, risulta per noi fondamentale che il docente di matematica sia consapevole della propria concezione della disciplina, dato che questa ha una fondamentale influenza sulla didattica e quindi sull'apprendimento degli studenti. Tale osservazione è necessaria per poter sviluppare un insegnamento convincente (senza imposizioni), cosciente (sapendo quello che si sta facendo) e responsabile (perché si sta facendo). Gli studenti, sempre più, interrogano i docenti con domande "a cosa serve", "perché fare queste cose", ecc.: in questo caso le risposte non possono essere date da un docente che non è consapevole della propria idea della disciplina; se l'insegnante non sa dare le risposte per se stesso, non sarà nemmeno in grado di fornirne di adeguate agli altri! Ma c'è anche da sottolineare che le risposte che si danno a queste domande degli studenti tante volte non riescono a convincere, proprio perché partono da concezioni superate o distorte della matematica.
Tra i matematici convivono diverse concezioni generali che riguardano la disciplina. In certi ambiti queste diverse concezioni non sembrano influire significativamente sui risultati del lavoro matematico, anzi, in certi ambiti posizioni che hanno forti contrasti riescono a lavorare insieme in modo proficuo, senza difficoltà, raggiungendo anche importanti risultati. D'altro canto, come si è visto, nell'insegnamento adottare, e quindi far proprie, determinate concezioni può risultare più opportuno rispetto ad altre.
Come si arriva ad una concezione aggiornata e didatticamente convincente e coinvolgente della disciplina? Certo, bisogna innanzitutto conoscere dettagliatamente alcuni sviluppi e risultati della disciplina stessa: con questo intendiamo quei concetti che vengono classificati come "di fondamento" o "metamatematici" ma che in realtà sono percorsi ~~e~~ risultati di matematica a pieno titolo, che hanno un particolare impatto su quello che intendiamo con il "fare matematica". Notevoli esempi di questo tipo sono: lo sviluppo dei diversi sistemi numerici (Naturali, Interi, Razionali, Reali), l'insiemistica (i problemi dell'accettazione degli assiomi

della teoria degli insiemi, il paradosso di Russell, il teorema di Cantor), la nascita delle geometrie non euclidee, il concetto di probabilità, i risultati limitativi della matematica come il Teorema di Lowenheim-Skolem e i teoremi di Gödel. E' necessaria inoltre una riflessione su alcuni aspetti generali, di natura più filosofica, come possono essere la natura ontologica dei concetti matematici, la genesi dei concetti matematici nell'uomo, la certezza dei risultati e dei metodi della matematica, il rapporto tra matematica e realtà, il significato e il valore del rigore e dei formalismi, il ruolo dell'infinito. Un ulteriore contributo viene dato dallo studio critico della matematica da un punto di vista filosofico, conoscendo e confrontando le posizioni filosofiche adottate nella storia del pensiero matematico che vengono man mano superate da sviluppi succesivi.
Questo è un lungo elenco che include alcuni concetti che richiedono sviluppi estesi e non abbiamo intenzione di commentarli tutti in questo scritto. Tuttavia dalle situazioni analizzate nella prima parte emergeva in modo particolare il tema del rapporto tra matematica e realtà, allora ci soffermeremo in modo specifico su questo tema. Nel farlo, si può notare anche un accenno ad una riflessione sulla genesi dei concetti matematici nell'uomo, tema particolarmente interessante dal punto di vista dell'insegnante.
L'insegnante, in quanto matematico, dovrebbe avere molto chiara l'idea che fare matematica non è immediato, in quanto prima di arrivare alla soluzione di un problema, molte sono le considerazioni che si fanno: a partire dall'analisi della situazione che vogliamo studiare (quindi capire quali sono gli aspetti rilevanti del problema) si eseguono operazioni mentali per rappresentarsi la situazione, fino ad arrivare allo sviluppo del problema con l'ausilio di strumenti matematici esistenti o adattandone di conosciuti o addirittura inventandone di nuovi.
La matematica nasce dallo studio di soluzioni a problemi concreti, ma la disciplina stessa ha saputo svincolarsi dal reale per poterlo gestire coerentemente. Con questo intendiamo che la matematica parte dal reale considerandone solo certi aspetti, quindi portandosi

immediatamente in un ambiente diverso, che non è più l'intera realtà, ma una sua rappresentazione mentale, in qualche modo semplificata. La realtà si presenta in molteplici aspetti diversi, di una quantità enorme e in modo disorganizzato. Quindi l'uomo, che è un essere limitato nelle sue capacità, anche cognitive (per esempio la capienza della memoria a breve termine non supera circa i 10 elementi), agisce entro precisi limiti e fatica a gestire direttamente tutta questa complicazione. Per riuscire a capire e gestire le diverse situazioni si trascurano tanti aspetti e se ne considerano solo alcuni (astrazione): a partire da questi si mettono in atto altre capacità mentali come l'idealizzazione e la generalizzazione. Si costruiscono così, in forma molto organizzata, introducendo quindi complessità, i concetti matematici che solo successivamente potranno trovare applicazione nella stessa e in altre situazioni concrete che hanno in comune gli stessi aspetti presi in considerazione. Se venissero considerati troppi aspetti della realtà che si vuole gestire non si ridurrebbe abbastanza la complicazione del reale e non si riuscirebbe a gestire nulla, così diviene necessario analizzare pochi e precisi aspetti. È interessante notare che non ci sono garanzie sul fatto che gli aspetti considerati siano sufficienti per gestire la situazione globale presa in considerazione, ma questa è una conferma che si ha solo alla fine, quando le applicazioni funzionano.

Un esempio che illustra quanto detto fino ad ora, può essere il compito di trovare la lunghezza del lato di un terreno "quadrato" di area conosciuta. Possiamo subito osservare che questo più che un problema banale, sembra un problema artificioso. Quando capita di sapere l'area di un terreno e doverne trovare i lati? Forse qualche esemplificazione di una tale situazione può essere utile: dispongo di una certa quantità di vernice e con essa si può dipingere una certa estensione di superficie, volendo usare tutta la vernice per dipingere un quadrato quale sarà il lato di questo? Per la risoluzione è necessario come requisito il concetto di quadrato e si potrebbe pensare di presentare il problema direttamente in modo geometrico. Infatti questo problema di gestire il rapporto tra l'area del quadrato

e il lato è fondamentale dal momento in cui le nostre misure di superficie vengono espresse in quadrati (metro quadrato, kilometro quadrato...). Anche la discussione sulla scelta di quadrati come unità di misura di superficie è interessante e giustifica la scelta del problema. Perchè non scegliere invece triangoli o esagoni? Anche questi tassellano il piano, ma ci accorgeremo che la scelta del quadrato è quella più semplice nel senso che porta ad una migliore gestione e a formule più dirette in quanto consone con altre scelte precedenti (per esempio usiamo gli assi cartesiani che sono ortogonali).
Tornando al problema del terreno, se andiamo ad attribuire un significato preciso alle parole utilizzate capiamo immediatamente che più o meno inconsciamente abbiamo eseguito delle operazioni mentali: qualcuno di voi ha mai visto un terreno perfettamente quadrato che vive interamente su un piano? Qualcuno ha mai visto un piano? I concetti che stiamo utilizzando (quadrato, piano, segmento,…) sono molto sofisticati e si arriva a questi dopo un attento percorso, per nulla banale, di costruzione. Un primo possibile approccio a questo problema può essere andare fisicamente sul terreno con un nastro e misurarne il lato. In matematica proponiamo un altro approccio, molto più complesso, cioè tralasciando tante irregolarità di questo terreno (non ci concentriamo su ogni conca o dosso del terreno, idealizzeremo come se fosse tutto contenuto in un piano), tralasciamo anche tante irregolarità nei lati e negli angoli e idealizzeremo come fossero segmenti rettilinei esattamente congruenti tra loro e che formano angoli retti. In questo modo dichiariamo che una buona approssimazione di questo terreno viene data da un quadrato (notare come il concetto di quadrato deve essere già conosciuto). Approfittando di centinaia di anni di sviluppo della geometria e dell'aritmetica, sappiamo calcolare la radice quadrata del dato, e ci fidiamo di questo risultato perché ne conosciamo le dimostrazioni e queste si basano solo su aspetti che abbiamo considerato anche noi nel nostro problema, e quindi è coerente con quello che stiamo trattando.

La soluzione proposta al problema è veramente dotata di una complessità molto più grande che l'andare a misurare direttamente: bisogna mettere in atto tante operazioni mentali, capire e applicare teorie matematiche complesse, ecc. Ma questa è la via preferibile, proprio perché evita di misurare: possiamo risolvere il problema senza muovere un dito, cosa che è particolarmente utile se questo terreno si trova su un altro pianeta, o è esistito solo nel passato o magari è solo un progetto futuro. Il problema vive in un ambiente reale, ma questa soluzione vive in un ambiente astratto dotato di strumenti astratti che l'uomo ha inventato per avere risposte coerenti. La superficie risulta essere un dato fisico, una quantità osservabile e tangibile di terra, ma dalla misura della superficie alla lunghezza del lato dovremmo sviluppare l'operazione di radice quadrata, la quale necessita di simbolismo e di metodo, ossia di strumenti che non appartengono alla dimensione fisica. La capacità umana di gestire la situazione concreta comprende operazioni mentali che vanno oltre al concreto. Le strategie matematiche che si utilizzano sono costruite in modo adeguato per poter funzionare nel modo più semplice possibile e compatibile con le difficoltà da superare. Sono azioni che stanno nella mente, che caratterizzano l'uomo come essere pensante, dotato di ingegno, di fantasia, di capacità critica,… dotato di possibilità che vanno oltre al reale. Queste operazioni sono complesse perché necessitano di spiegazioni e passaggi per stadi successivi, dove ogni stadio rappresenta in qualche modo un approfondimento o una dimensione astratta, fino ad arrivare ad una teoria stessa astratta che sia coerente e senza contraddizioni.

In questo senso anche gli strumenti più sofisticati della matematica risultano risposte formali che funzionano nelle applicazioni. A volte nella formalizzazione astratta emergono difficoltà che nel concreto non si vedono. Tali difficoltà vengono "sistemate" in maniera coerente con il sistema formale anche se questa "sistemazione" sintattica non ha una corrispondenza semantica.

Si pensi per esempio alla moltiplicazione tra i naturali, la quale semanticamente significa ripetere l'addizione del primo fattore tante volte quante ne indica il secondo, e al caso $ax0=0$. Cosa significa sommare *a* a se stesso 0 volte?.

3. Conclusione

In questo lavoro si è voluta sottolineare l'importanza di essere consapevoli che dietro ogni pratica didattica soggiace un'idea di matematica, e che sono i problemi propri di questa idea che si riflettono nel lavoro in aula, nell'apprendimento degli studenti e infine anche nell'idea di matematica che questi si costruiscono.
Questo constitusce una chiave di lettura delle pratiche didattiche. In questo scritto si sono analizzati due stereotipi in questa chiave, proprio per illustrare la sua potenzialità.
Nel caso dello stile meccanico-mnemonico si è visto che la concezione della matematica come puro "gioco formale" comporta una didattica caratterizzata da regole da imparare a memoria e lunghi elenchi di esercizi tutti uguali, creando nella maggior parte degli allievi un'idea della disciplina lontana della realtà e senza utilità. Anche nel caso dello stile materiale-concreto si è visto che la concezione della matematica come "serva della tecnica" comporta una didattica caratterizzata dal limitarsi esclusivamente alle soluzioni di problemi concreti, senza liberarsi da aspetti irrilevanti per la soluzione, senza generalizzare strategie nè creare concetti astratti, istillando negli allievi un'idea della disciplina come un insieme di strumenti "misteriosi" da utilizzarsi solo in particolari situazioni.
Certamente queste pratiche sono molto stereotipate proprio per facilitarne l'analisi in questa chiave. In realtà le pratiche didattiche attivate da un docente non rientrano mai in schemi cosi rigidi. Tuttavia ogni docente, più o meno consapevolmente, ha una propria idea di matematica e il legame tra questa idea e la sua pratica in aula rimane. Sicuramente non solo la propria idea della matematica influenza la pratica, anche l'idea di come si impara (psicologia

dell'apprendimento), l'idea di cosa sia la formazione (pedagogia)... giocano il loro ruolo nelle azioni didattiche. Queste, però, non possono avere un ruolo cosi caratterizzante per l'insegnamento della matematica come la concezione della disciplina stessa.
Ci sono visioni generali della disciplina che sono più opportune che altre nell'insegnamento. Quale sarebbe una tale concezione, che caratteristiche ha? Le risposte a queste domande possono avere ampie discussioni. In queste pagine abbiamo proposto, in modo generale, un possibile percorso per arrivare a costruirsi una tale concezione, attraverso lo studio di certi concetti e sviluppi matematici, la riflessione filosofica su alcuni concetti e l'analisi critica di posizioni storiche superate.
Purtroppo nella formazione iniziale e continua dei docenti di matematica di tutti i livelli e nella ricerca disciplinare didattica, questi temi vengono spesso trascurati o poco considerati. Anche la nostra esperienza ci ha convinto che una particolare attenzione su questi temi risulta fondamentale per dare al proprio insegnamento un vero salto di qualità, dotato di una nuova consapevoleza sull'apprendimento della disciplina.

4. Bibliografia

- K. Devlin. Dove va la matematica, Bollati Boringhieri, Torino, 1999.
- R. Ferro: "Conoscere umanamente la conoscenza umana" in H. Puyau e al. eds.: "Epistemologia de las ciencias: la vida humana, su especificidad", CIAFIC Ediciones, Buenos Aires, 2003, pp. 203-258. *Prendendo spunto dalle difficoltà di conoscere in matematica, affronta in modo non convenzionale alcuni aspetti del problema della conoscenza.*
- R. Ferro: "Realtà, conoscenza della realtà e rappresentazione della conoscenza della realtà" negli Atti del Simposio de Epistemología de las Ciencias Naturales su "La filosofía actual y su relación con el estado contemporáneo de la Ciencia" Buenos Aires 2007, CIAFIC Ediciones, Buenos Aires, in stampa. *Cerca di conciliare il realismo con le difficoltà della conoscenza.*
- E.Giusti: Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici, Bollati Boringhieri, Torino, 1999. *Chiara posizione di epistemologia della matematica.*
- G. Lolli: Filosofia della matematica, Il Mulino, Bologna, 2002. *Autorevole riferimento di filosofia della matematica.*
- B. Gold: How your philosophy of mathematics impacts your teaching! In The College mathematics journal of MAA Vol 42 No 3 2011
- M. Ferrari: Valore Formativo della matematica 1, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, luglio, volume 32 anno 2009 sezione A
- M. Ferrari: Valore Formativo della matematica 2, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, settembre, volume 32 anno 2009 sezione A